

Вариант 1

1 часть.

В заданиях №1-7 запишите только ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

1.(16) Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина 21 рубль. Средний расход бензина на 100 км составляет 6 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2.(16) Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

3.(16) На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

4.(16) Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

5.(16) Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

6.(16) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный

путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

7. (16) . Найдите значение x , при котором функция $y = \sqrt{-6 + 12x - x^2}$ принимает наибольшее значение.

2 часть

В задании №8 выберите одно из представленных уравнений (по изученной теме) и запишите подробное решение.
(26балла)

8.1. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7 \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} \right) + 10$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$

8.2. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

8.3 а) Решите уравнение $2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Контрольная работа по алгебре, 10 класс

16.02.2021 г

Вариант 2

1 часть.

В заданиях №1-7 запишите только ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

1. (16) Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина — 20 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2. (16) На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

3. (16) Найдите корень уравнения $x = \frac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

4. (16) Найдите значение выражения $\frac{9\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

5. (16) Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала

торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

6. (16) Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

7. (16) Найдите значение x , при котором функция $y = \sqrt{4-4x-x^2}$ принимает наибольшее значение.

2 часть.

В задании №8 выберите одно из представленных уравнений (по изученной теме) и запишите подробное решение.

(2 балла)

8.1. а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} + 16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3; 8]$.

8.2. а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$.

8.3. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Пояснительная записка

Диагностическая работа в 10 классе содержит задания за курс математики 5-6 классов и алгебры 7-10 классов.

Работа рассчитана на **45 мин** (1 урок).

Использование калькуляторов и любой другой электронной техники **запрещено**.

Работа выполняется на двойных листах в клетку с угловым штампом ОО.

В заданиях № 1 – 7 части 1 в чистовик записывается только ответ.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

В задании № 8 2 части 2 нужно решить только одно из предложенных уравнений, согласно программе по УМК, используемому в ОО. В задании требуется привести подробное решение и ответ.

При оформлении решения пункта б) обратите внимание на отбор корней. Отбор должен быть обоснован. В противном случае, 1 балл

Шкала выставления отметок

Баллы	0 - 3	4 - 5	6 - 7	8 - 9
Отметки	2	3	4	5

При подсчёте общего количества учитываются баллы за задания № 1 - 7 и № 8 (если обучающиеся выполнили более одного уравнение, то учитывается только одно уравнение, при решении которого было набрано большее количество баллов. Суммировать баллы за частичное решение различных уравнение нельзя.)

Часть 1

За каждый правильный ответ №№ 1 – 7 – **1 балл**

Вариант 1	
№	ответ
1	7560
2	0,1
3	1
4	5
5	2
6	7
7	6

Вариант 2	
№	ответ
1	10800
2	5
3	0,04
4	9
5	2
6	16
7	-2

Часть 2

За правильное решение и верный ответ № 8 – **2 балла**

Критерии оценивания задания № 8

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или в пункте <i>б</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Уважаемые коллеги!

Обращаю ваше внимание, что при выставлении баллов за задание №8, следует учесть, что, если:

- в решении пункта а) допущена только ОДНА вычислительная ошибка (вычислительная ошибка – это ошибки при выполнении сложения, вычитания, умножения, деления), но пункт б) с допущенной ошибкой выполнен верно, то выставляется 1 балл (см. критерии);
- в пункте а) допущена любая другая ошибка или более одной вычислительной ошибки, то пункт б) не учитывается. Выставляется 0 баллов (см. критерии);
- при оформлении решения пункта б) обратите внимание на отбор корней. Отбор должен быть обоснован.

Вариант 1.

8.1а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

Решение.

а) Сделаем замену $t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$, возведём обе части в квадрат

$$t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} - 2 \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{3}{x-2} + \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2}{4} - 3 + \frac{9}{(x-2)^2},$$

тогда $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} = t^2 + 3$. Имеем: $2(t^2 + 3) = 7t + 10 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2}, \\ t = 4. \end{cases}$

Вернемся к исходной переменной. Если $t = -\frac{1}{2}$, то $\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = -(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Если $t = 4$, то $\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = 8(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - \sqrt{22}, \\ x = 6 + \sqrt{22}. \end{cases}$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[-2; 2]$. В силу неравенств

$$0 < 6 - \sqrt{22} < 6 - 4 = 2_{\text{и}} 6 + \sqrt{22} > 6 + 4 = 10 > 2,$$

из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа -1 и $6 - \sqrt{22}$.

Ответ: а) $\{-1; 4; 6 - \sqrt{22}; 6 + \sqrt{22}\}$; б) $-1; 6 - \sqrt{22}$.

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

8.2 а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Заметим, что $9^{(x-\frac{1}{2})} = 9^{(x-1+\frac{1}{2})} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{(x-1)} = 3 \cdot 9^{(x-1)}$, преобразуем исходное уравнение:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

Пусть $t = 3^{x-1}$ тогда уравнение запишется в виде $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{5}{3}$.

При $t = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$ откуда $x = 1$.

При $t = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$ откуда $x = \log_3 5$.

б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$, корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

$$2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4.$$

8.3. а) Решите уравнение

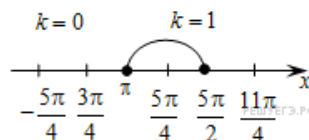
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Используем формулу приведения и основное тригонометрическое тождество

$$2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3\sqrt{2} \cos x + 4 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}, \\ \cos x = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\sqrt{2} \end{cases} \begin{matrix} | \cos x | \leq 1 \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберём корни, лежащие на заданном отрезке (см. рис.).

Искомый корень: $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{4}$.

Вариант 2.

8.1. а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} + 16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3; 8]$.

Решение.

а) Пусть $t = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2}$, тогда $t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2} - 5$. Далее имеем: $2(t^2 + 5) = t + 16 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Вернемся к исходной переменной: $\begin{cases} \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} = 2, \\ \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ \begin{cases} (x-2)^2 - 10 = 4x - 8, \\ (x-2)^2 - 10 = -3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 2 = 0, \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{14}, \\ x = 4 + \sqrt{14}, \\ x = -3, \\ x = 4. \end{cases}$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[3; 8]$. В силу неравенств

$$4 < 4 + \sqrt{14} < 4 + 4 = 8 \text{ и } 4 - \sqrt{14} < 4 - 3 = 1 < 3,$$

из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа 4 и $4 + \sqrt{14}$.

Ответ: а) $\{-3; 4; 4 + \sqrt{14}; 4 - \sqrt{14}\}$; б) 4; $4 + \sqrt{14}$.

8.2. а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $9^{x+1} - 6 \cdot 3^{x+1} + 5 = 0$.

Пусть $t = 3^{x+1}$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 6t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = 5$.

При $t = 1$ получим $3^{x+1} = 1$, откуда $x = -1$.

При $t = 5$ получим $3^{x+1} = 5$, откуда $x = \log_3 \frac{5}{3}$.

б) Так как $-1 < 0 < \log_3 \frac{3}{2}$, то корень $x = -1$ не принадлежит промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$. Поскольку $\log_3 \frac{3}{2} < \log_3 \frac{5}{3} < \log_3 3 = 1 < \sqrt{5}$, корень $x = \log_3 \frac{5}{3}$ принадлежит промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$.

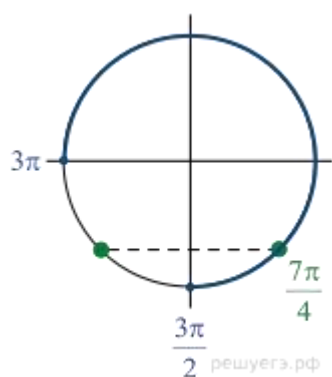
Ответ: а) $-1, \log_3 \frac{5}{3}$; б) $\log_3 \frac{5}{3}$.

$$2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

8.3. а) Решите уравнение

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.



а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Уравнение $\sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет. Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим число $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}; \frac{7\pi}{4}$. б) $\frac{7\pi}{4}$.